ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Chọn C.

Từ đồ thị, $f'(x)<0$ khi $x\in(-\infty;-1)\cup(1;4)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Câu 2. Chọn B.

Từ bảng biến thiên, $y'>0$ trên khoảng $(0;2)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 3. Chọn C.

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(1;3)$. Thay vào các phương án, chỉ có $y=x+2$ thỏa mãn vì $3=1+2$.

Câu 4. Chọn C.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{1-x}=-2$ nên tiệm cận ngang là $y=-2$.

Câu 5. Chọn A.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ chỉ khi đi qua $x=1$ nên hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 6. Chọn D.

Từ đồ thị: tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận xiên $y=x$, đồ thị đi qua điểm $(0;-1)$.

Ta có $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}$ có tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận xiên $y=x$ và $y(0)=-1$.

Câu 7. Chọn D.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=+\infty$ nên đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 8. Chọn B.

$y=x^3+5x+1$ có $y'=3x^2+5>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 9. Chọn C.

$h'(t)=24,5-9,8t=0\Leftrightarrow t=2,5$. $h'(t)>0$ khi $t<2,5$ và $h'(t)<0$ khi $t>2,5$ nên $h(t)$ lớn nhất khi $t=2,5$ giây.

Câu 10. Chọn B.

$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=x-1+\dfrac{1}{x-1}$ nên tiệm cận xiên là $y=x-1$. Suy ra $a=1$, $b=-1$, $a+3b=-2$.

Câu 11. Chọn B.

Với $x=0$ thì $y=-3$. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;-3)$.

Câu 12. Chọn B.

Từ đồ thị, trên đoạn $[-2;2]$: giá trị nhỏ nhất $m=f(-2)=f(1)=-5$, giá trị lớn nhất $M=f(-1)=f(2)=-1$.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 1. a) Đúng. b) Đúng. c) Đúng. d) Sai.

Từ đồ thị: tiệm cận đứng $x=1$, tiệm cận ngang $y=-1$, đồ thị đi qua các điểm $(2;0)$ và $(0;-2)$.

Suy ra $-c=1$, $a=-1$, $2a+b=0$. Do đó $c=-1$, $a=-1$, $b=2$. Kiểm tra: $y(0)=\dfrac{b}{c}=-2$ (thỏa mãn). Vậy $y=\dfrac{-x+2}{x-1}$.

a) Đồ thị có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=-1$. Mệnh đề đúng.

b) $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$ nên hàm số không có cực trị. Mệnh đề đúng.

c) $a=-1$, $b=2$, $c=-1$ nên có đúng hai số âm. Mệnh đề đúng.

d) Giao điểm của đồ thị với trục hoành là $(2;0)$, $y'(2)=-1$. Tiếp tuyến: $y=-(x-2)=-x+2$. Mệnh đề sai.

Câu 2. a) Đúng. b) Đúng. c) Đúng. d) Sai.

a) Chiều dài gấp hai lần chiều rộng nên chiều dài là $2x$. Mệnh đề đúng.

b) Gọi h là chiều cao. Ta có $2x\cdot x\cdot h=36\Rightarrow h=\dfrac{18}{x^2}$. Mệnh đề đúng.

c) Bể không có nắp nên tổng diện tích cần xây là $S=2x^2+2\cdot 2x\cdot h+2\cdot x\cdot h=2x^2+6xh=2x^2+\dfrac{108}{x}$. Mệnh đề đúng.

d) $S'(x)=4x-\dfrac{108}{x^2}=0\Leftrightarrow x^3=27\Leftrightarrow x=3\in(0;4]$.

$S'(x)<0$ trên $(0;3)$, $S'(x)>0$ trên $(3;4]$ nên S nhỏ nhất khi $x=3$. Khi đó chi phí nhỏ nhất và chiều cao $h=\dfrac{18}{9}=2$ m. Mệnh đề sai.

Câu 3. a) Đúng. b) Sai. c) Sai. d) Đúng.

a) Đường đi dạo chạy dọc trục hoành từ $x=0$ đến $x=8$, dài 8 đơn vị, tức là 800 m. Mệnh đề đúng.

b) Khoảng cách theo phương thẳng đứng từ điểm $(x;0)$ trên đường đi dạo đến bờ hồ đối diện là $f(x)$.

$f'(x)=\dfrac{-3x^2+18x-15}{10}=\dfrac{-3(x-1)(x-5)}{10}<0$ với $x\in(0;1)$ nên $f(x)$ giảm trên $[0;1]$. Khoảng cách giảm dần. Mệnh đề sai.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=5$. Ta có $f(0)=5,6$; $f(1)=4,9$; $f(5)=8,1$; $f(8)=0$.

Khoảng cách lớn nhất là $8,1$ đơn vị, tức là 810 m. Mệnh đề sai.

d) Đường thẳng $d: x+y-15=0$. Điểm $M\left(x;f(x)\right)$ với $0\le x\le 8$.

$d(M,d)=\dfrac{|x+f(x)-15|}{\sqrt{2}}$. Xét $g(x)=15-x-f(x)=\dfrac{x^3-9x^2+5x+94}{10}$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-18x+5}{10}=0\Leftrightarrow x_1=\dfrac{9-\sqrt{66}}{3}\approx 0,29$ hoặc $x_2=\dfrac{9+\sqrt{66}}{3}\approx 5,71$.

$g(0)=9,4$; $g(x_1)\approx 9,472$; $g(x_2)\approx 1,528$; $g(8)=7$.

Suy ra $\min\limits_{[0;8]} g(x)=g(x_2)\approx 1,528248>0$.

Khoảng cách ngắn nhất trên thực tế là $d_{\min}=\dfrac{100g(x_2)}{\sqrt{2}}\approx 108,06$ m >90 m. Mệnh đề đúng.

Câu 4. a) Đúng. b) Sai. c) Sai. d) Sai.

Ta có $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}=x+1-\dfrac{4}{x+1}$, tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

a) $\lim\limits_{x\to -1^+} y=-\infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x=-1$. Mệnh đề đúng.

b) $y'=1+\dfrac{4}{(x+1)^2}>0, \forall x\ne -1$ nên hàm số không có cực trị. Mệnh đề sai.

c) Hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$. Mệnh đề sai.

d) Tiệm cận đứng $x=-1$, tiệm cận xiên $y=x+1$ hay $x-y+1=0$. Gọi $M\left(m;m+1-\dfrac{4}{m+1}\right)$ với $m\ne -1$.

$d_1=|m+1|$, $d_2=\dfrac{\left|m-m-1+\dfrac{4}{m+1}+1\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}\,|m+1|}$.

$d_1 \cdot d_2 = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Mệnh đề sai.

PHẦN III. TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 1. Đáp số: 2001.

Lợi nhuận: $L(x) = R(x) - x \cdot H(x) = -0,01x^2 + 500x - 60000 - 420x = -0,01x^2 + 80x - 60000$ (nghìn đồng).

$L(x) > 60000 \Leftrightarrow -0,01x^2 + 80x - 120000 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 8000x + 12000000 < 0 \Leftrightarrow 2000 < x < 6000$.

Kết hợp $x \in \mathbb{N}^*$, $1 \le x \le 5000$, số sản phẩm ít nhất là 2001.

Câu 2. Đáp số: 4.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có tiệm cận đứng tại các nghiệm của phương trình $f(x) = \dfrac{5}{2}$.

Từ bảng biến thiên, đường thẳng $y = \dfrac{5}{2}$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 4 điểm, mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$ có đúng một nghiệm.

Tại $x = 1$ thì $f(x) \to \pm\infty$ nên $y \to 0$, đường thẳng $x = 1$ không là tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 3. Đáp số: 7443.

Đặt $MN = x$ $(0 < x < 90)$. Ta có $BM = \dfrac{90 - x}{2}$, $MQ = BM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}(90 - x)}{2}$.

Cuộn tấm tôn thì chu vi đáy là MN: $2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$; chiều cao $h = MQ$.

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \frac{\sqrt{3}(90 - x)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\left(-x^3 + 90x^2\right).$$

Xét $g(x) = -x^3 + 90x^2$ trên $(0;90)$: $g'(x) = -3x^2 + 180x = 0 \Leftrightarrow x = 60$. $g(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 60$, $g(60) = 108000$.

$$V_{\max} = \frac{\sqrt{3} \cdot 108000}{8\pi} = \frac{13500\sqrt{3}}{\pi} \approx 7443 \text{ cm}^3.$$

Câu 4. Đáp số: $0,3$.

$y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x - 1}$. Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x$.

$y' = 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$. Hai điểm cực trị $A(0;-1)$, $B(2;3)$.

Đặt $t = x_0 - 1 > 0$. Ta có $M\left(1+t;1+t+\dfrac{1}{t}\right)$, $d_1 = t$, $d_2 = \dfrac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}t}$.

$P = d_1 + 2d_2 = t + \dfrac{\sqrt{2}}{t} \geq 2\sqrt{\sqrt{2}}$. Dấu bằng xảy ra khi $t^2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow t = \sqrt[4]{2}$.

Đường thẳng $AB: 2x - y - 1 = 0$, $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

$$d(M, AB) = \frac{\left|2(1+t) - \left(1+t+\dfrac{1}{t}\right) - 1\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|t - \dfrac{1}{t}\right|}{\sqrt{5}}.$$

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(M, AB) = \left|t - \frac{1}{t}\right|.$$

Khi P đạt giá trị nhỏ nhất thì $t = \sqrt[4]{2} > 1$, do đó $S_{MAB} = \sqrt[4]{2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0,3483$.

Làm tròn đến hàng phần mười, $S_{MAB} \approx 0,3$.

Câu 5. Đáp số: 675.

Tốc độ truyền bệnh: $v(t) = N'(t) = 90t - 3t^2$ với $0 \leq t \leq 30$.

$v'(t) = 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$. $v(0) = 0$; $v(15) = 675$; $v(30) = 0$.

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 675 người/ngày.

Câu 6. Đáp số: 439.

$y' = \dfrac{x^2 - 4x - 2a - b}{(x-2)^2}$. Đồ thị có điểm cực trị $(1;1)$ nên $y'(1) = 0$ và $y(1) = 1$:

$$\begin{cases} -3 - 2a - b = 0 \\ \dfrac{1 + a + b}{-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = -3 \\ a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Khi đó $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \dfrac{1}{x-2}$ (thử lại thỏa mãn).

Gọi $\alpha, \beta > 0$ lần lượt là khoảng cách theo phương ngang từ A, B đến đường thẳng $x = 2$, với A thuộc nhánh trái, B thuộc nhánh phải.

Khi đó $A\left(2-\alpha;3-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\right)$, $B\left(2+\beta;3+\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)$.

$AB^2 = (\alpha+\beta)^2 + \left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2 = (\alpha+\beta)^2\left[1+\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2\right]$.

Vì $(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta$ nên $AB^2 \geq 4\alpha\beta\left[1+\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2\right] = 4\left(2\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2\right) \geq 4\left(2\sqrt{2}+2\right)$.

Dấu bằng xảy ra khi $\alpha = \beta$ và $2\alpha\beta = \frac{1}{\alpha\beta}$, tức là $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

$AB_{\min} = 2\sqrt{2+2\sqrt{2}} \approx 4,3947$ đơn vị. Chiều dài cây cầu ngắn nhất khoảng 439 m.

---------- HẾT ----------